三分损益法—中国古代最早确定乐音数学规律的方法

王 怡
(山西大同大学艺术学院,山西大同 037009)

摘 要:中国古代首先用“三分损益法”计算五声音阶、七声音阶和十二律的相对音高、音程关系及音阶结构.文献和考古证明,三分损益法是中国古代最早确定乐音数学规律的方法.

关键词:三分损益法 五声音阶 七声音阶 十二律
中图分类号:G6121.1 文献标识码:A 文章编号:1674-0874(2007)01-0088-05

中国古代音乐学称乐律学,包括乐学和律学.乐学是从音乐实践出发,探讨乐音及其音感的相互关系,包括宫调、记谱、读谱、乐器法等内容.律学是从发声振动规律出发,研究乐音数理关系,包括产生乐音的有关法则或规律、律制的规定、定律器的制定,还要旁及与历法和度量衡的关系.中国古代首先用“三分损益法”从数学上计算乐音的相对音高、音程关系及音阶结构,由该方法计算所得到的乐律,称“三分损益律”.对此,中外学者已作了卓有成效的研究.本文主要在他们研究的基础上,作一概括和分析.

1 中国古代律学的基本概念

1.1 十二律

十二律也称“律吕”,这是律学研究的核心,所以古人也称律学为“律吕”或“律吕之学”.十二律的名称按音高顺序排列可分为:

黄钟 大吕 太簇 夹钟 姑冼 仲吕

蕤宾 林钟 夷则 南吕 无射 应钟

与今天的音名比较,它们相当于:

C #C D #D E F #F G #G A #A B

按此排列,位于单数者称为“六律”或“阳律”,位于双数者称为“六吕”或“阴吕”、“六同”、“六间”.《汉书》卷二十一《律历志》云:“律有十二,阳六为律,阴六为吕.”由此可见,“律吕”就是六律和六吕的合称.

西周时,一些钟铭有“大吕”、“姑冼”、“林钟”、“无射”等律名,由此可知西周已产生了十二律的名称[1].十二律的全部名称最早记载于《国语。周语下》中.周景王二十三年(公元前522年),将铸无射钟,问律于乐官伶州鸠,伶州鸠列出了这十二律的名称.

十二律的起源在音乐界仍有争论.通常的说法是,黄帝派伶伦去“大夏之西”的“昆仑之阴”采竹子,将竹子裁为三寸九分长的竹管,吹出的音就是“黄钟”.然而,这个“大夏之西”的“昆仑之阴”是什么地方呢?英国著名学者李约瑟认为是古巴比伦.古巴比伦分别将十二律传到希腊和中国.但这种说法缺乏根据.

1.2 五声音阶和七声音阶

中国古代没有“音阶”一词,但有明确的音阶概念.五声音阶和七声音阶分别称为“五声”和“七声”.五声的名称是:

宫 商 角 徵 羽

七声的名称是:

宫 商 角 变徵 徵 羽 变宫

《淮南子。天文训》把“变徵”叫做“和”,“变宫”叫做“闰”.五声的名称最早见于《左传》,它的起源可能与天文学上的二十八宿有关,这是神秘主义在律学研究上的表现.五声的发音可能与禽兽的鸣叫有关.《管子。地员篇》中对五声作了这样的描述:

收稿日期:2006-12-25
作者简介:王怡(1980-),女,山西大同人,学士,助教,研究方向:美声唱法.

"凡听徵,如负猪豕觉而骇;凡听羽,如鸣能上能马在野;凡听宫,如牛鸣窌中;凡听商,如离群羊;凡听角,如雉登木以鸣,音疾以清."

引文第一句"如负猪豕觉而骇",指猪受到伤害而发出的惊叫声."窌"(jiao),即窖,古代圈牛的地方.这段话的大意是:上古时期,"牛、马、雉、猪、羊"的发音就与"宫、羽、角、徵、商"的发音相似.

文献和考古证明,五声音阶的名称至迟产生于商代.正如杜佑《通典》所说:"自殷以前,但有五声."[2] 然而,制成能发出五声和七声的乐器的年代则更早.20世纪80年代在河南舞阳贾湖新石器遗址出土16枝骨笛,其制成年代在6000年前左右.这些骨笛是竖吹的,形状固定,制作精美.对其中一枝长22.2cm,且保存完整无裂缝的骨笛进行测试[3],结果表明:该笛可发出清商六声音阶,其六声为:

角 徵 羽 闰(变宫) 宫 商

相当于今日的:

mi sol la #si do re

或下徵调七声音阶.其七声为:

宫 商 角 和(变徵) 徵 羽 变宫

相当于今日:

do re mi fa sol la si

后者成为此后中国传统的新音阶.贾湖骨笛证明了当时在音乐实践中已用了六声或七声音阶.

埙是陶土制作的吹奏乐器.随着音孔不断增多,埙成为可以吹奏曲调的旋律乐器.西安半坡遗址出土一音孔埙,开闭该音孔,可发出小三度的二个音.在对后来的陶埙、磬、钟的测音表明,小三度在夏、商、周的乐器中普遍存在.夏、商初,埙发展到三孔,由三声音列发展到四声、五声.在甘肃玉门火烧沟出土的20余件三音孔的埙中,有9件保存完好,它们是新石器时代晚期或夏代初期遗物.对它们的测音表明,开闭不同音孔可发出四个乐音,构成宫、角、徵、羽四声音列.个别的埙还能发出宫、角、清角(比角音高半音的音)、徵、羽的五声音列[4].

埙发展到殷商时期,特别值得我们注意的两例是:河南辉县琉璃阁出土的五音孔陶埙和安阳小屯殷墓出土武丁(约公元前1238—公元前1180年)时五音孔陶埙.对它们的测音结果表明[5]:琉璃阁殷墓五音孔陶埙二个,一大一小,却都能发出十一个高度不同的音,而且发音一致.这表明在大约公元前13世纪,半音与绝对音高或标准音高的观念已经建立起来了,而且它继承了前述火烧沟出土的埙的发音传统,其音列的前四个音是宫、角、徵、羽.小屯殷墓五音孔陶埙更有意义.它已具有五声(宫、商、角、徵、羽)二变(变徵、变宫)的完整的七声音阶,而且还有清商、清角、清徵和闰四个变化音.它在十一个音之间构成了半音关系,只差一个音就具备"十二律"了.这一事实证明,中国人在音乐实践上建立七声音阶的时间至少是在公元前13至前12世纪之间[6].

1.3 十二律与五(七)声音阶的关系

七个音阶中,两个变声所在的位置不同,就会出现不同的音阶形式.按照五四以来流行的称谓,分别称之为古音阶、新音阶和俗乐音阶;而教科书常称之为雅乐音阶、清乐音阶和俗乐音阶;近年来,有人又称其为正声调、下徵调和俗乐调.这三种音阶形式,当以C为宫音时,如表1所示.

表1 十二律与五(七)声的关系

律名	音名	音阶形式		
		古音阶	新音阶	俗乐音阶
黄钟	C	宫	宫	宫
大吕	#C			
太簇	D	商	商	商
夹钟	#D			
姑洗	E	角	角	角
仲吕	F		变徵	变徵
蕤宾	#F	变徵		
林钟	G	徵	徵	徵
夷则	#G			
南吕	A	羽	羽	羽
无射	#A			变宫
应钟	B	变宫	变宫	

七声音阶含有五个正声和两个变声,因此,五声在七声中占核心地位,而宫在音律计算中的地位尤为重要.计算中通常从宫音开始,最后返回到宫位,这称作"返宫".

当一种音阶形式确定之后,不仅黄钟可以为宫,其他各律也可"轮流为宫",古代称为"旋宫".同时,音阶中各音也可以轮流为主音,而形成各种调式.以宫音为主的是宫调式,以徵音为主的称徵调式等.十二律与五声可组成八十四调.

2 三分损益法

2.1 三分损益法的涵义及最早记载

所谓"三分损益法",就是以三分法来确定各律相对音高或音程关系的数学方法.由该数学方法计算所得到的律叫"三分损益律".《史记.律书》对这种方法概述道:

"生黄钟术曰:以下生者,倍其实,三其法;以上

生者,四其实,三其法.”

“实”与“法”,即分数的分子和分母.“倍其实,三其法”,即2/3;“四其实,三其法,”即4/3.原文的意思是:“下生者”,乘以2/3,实则将原弦长分为三份,去其一份,即(1-1/3)=2/3,这称为“损”;“上生者”,乘以4/3,实则将原弦长分为三份后,加上一份,即(1+1/3)=4/3,这称为“益”.所以,“下生”后的弦长比原弦短,音增高五度;“上生”后的弦长比原弦长,音降低为下方四度.下方四度是上方五度的转位.这样,“上下”交替地推算各律音高或各律弦长数值,又称为“上下相生”法.古希腊著名学学者毕达哥拉斯(Pythsgoras,公元前570—公元前496年)所创“五度相生法”,该法只有一个生律因子,即2/3,其计算方法与三分损益法完全相同.所以,三分损益律就是五度相生律,或五度律.

最早较概略地述及三分损益法的文字记载见之于《国语·周语》.如前文所述,周景王二十三年(前522年),问律于乐官伶州鸠,伶州鸠列出了这十二律的名称,并对音律与数的关系作了说明:

“律,所以立均出度也.……纪之以三,平之以六,成于十二,天之道也.”

其中,“均”(读yun),即“均钟木”或称“均钟器”,是中国古代最早的一种弦式高音标准器,又称定律器.被伶州鸠称为自然法则(“天之道也”)的“纪之以三,平之以六,成于十二”是什么意思呢?秦汉以来,经学家们虽将“六”释为“六律”,“十二”释为“十二律”,但将“三”释为“天、地、人”.事实上,关于“三、六、十二”的整句话都应与律学有关.戴念祖认为,“纪之以三”就是《史记·律书》表述的“三其法”.由此可见,三分损益法至迟在公元前6世纪下半叶已有端倪[7].

2.2 三分损益法计算五声音阶

三分损益法且用于计算五声音阶的详细记载最早见《管子》一书.《管子·地员》写道:

“凡将起五音,凡首,先主一而生之,四开以合九九,以是生黄钟小素之首,以成宫.三分而益之以一,为百有八,为徵;不无有三分而去其乘,适足以是生商;有三分而复于其所,以是生羽;有三分去其乘,适足以是成角.”

“先主一而生之,四开以合九九”一句,大意是:(1×3)4=9×9.《清史稿》卷九十五《乐志二》曰:“小素云者,素、白练,乃熟丝,即小弦之谓.”由此,“黄钟小素之首”句中的“小素”可解释为弦线.这也说明了《管子·地员》是以弦线来确定音调的.“三分而益之以一”,即4/3.4/3可写为(2×2/3).“不无有三分而去其乘”一句中,“不无”意为“有”,“有”与“又”古文相通;“去其乘”的意思是在(2×2/3)的算式中,去掉2×,因而相生因子为2/3.“有三分而复于其所”,即将上句去掉的东西再恢复,还用(2×2/3)=4/3的因子.在理解了《管子·地员》的文句后,我们用现代的表达方式把它所记述的计算方法及其与五音相配的内容写出来:

$(1\times 3)^4=9\times 9=81$　宫

$81\times 4/3=108$　徵

$108\times 2/3=72$　商

$72\times 4/3=96$　羽

$96\times 2/3=64$　角

按弦长从长到短或按音从高到低排列,《管子.地员》记载的五声音阶是:徵羽宫商角.它是以徵音为宫(即以徵为最低音)的五声音阶,也称五声徵调式.

《管子·地员》以81为宫,先益后损,计算五声.《史记·律书》则以81为宫,先损后益,计算五声.《史记·律书》写道:

“九九八十一以为宫.三分去一,五十四为徵.三分益一,七十二以为商.三分一,四十八以为羽.三分益一,六十四去以为角.”

这就是:

$9\times 9=81$　宫

$81\times 2/3=54$　徵

$54\times 4/3=72$　商

$72\times 2/3=48$　羽

$48\times 4/3=64$　角

按弦长从长到短或按音从高到低排列,《史记·律书》记载的五声音阶是:

宫、商、角、徵、羽.

其中,徵、羽两音比《管子·地员》的相生结果在长度上都短一半,即高一个八度.《管子·地员》以徵为最低音,《史记·律书》以宫为最低音.结果有些不同,但所计算的五声音阶是相同的.《史记·律书》记载的是五声宫调式.

2.3 三分损益法计算十二律

中国古代,不仅用三分损益法计算五声音阶,也用三分损益法计算十二律.《吕氏春秋·音律》有最早的记载,即

“黄钟生林钟,林钟生太簇,太簇生南吕,南吕生姑洗,姑洗生应钟,应钟生蕤宾,蕤宾生大吕,大吕生夷则,夷则生夹钟,夹钟生无射,无射生仲吕.三分所生,益之一分以上生;三分所生,去其一分以下生.黄钟,大吕,太簇,夹钟,姑洗,仲吕,蕤宾为上;林钟,夷则,南吕,无射,应钟为下.”

这种生律法叫做“隔八相生法”, 它以黄钟为元声, 余声则依一定次序计算, 每隔八位生一律.《吕氏春秋》对十二律相生的计算, 未载明各律的“律长”(各律的真实长度)和“律数”(各律长度的比例), 可能是一种相对音高的计算方法. 现设黄钟弦长为 1, 由《吕氏春秋》相生法及其次序得到的各律见图 1.

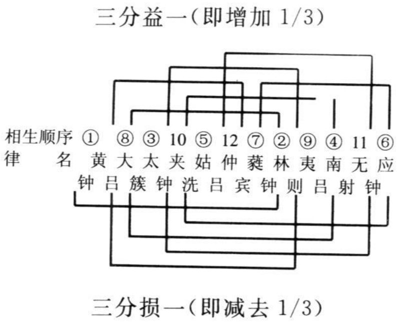

图 1 《吕氏春秋》相生法相生十二律

从图 1 可以看出, 从黄钟到林钟为“下生”, 从林钟到太簇为“上生”. 上生时, 三分益一; 下生时, 三分损一. 一下一上, 相互交错, 只是从蕤宾到大吕须再上生, 这样才能保证所生的律在八度之内.

《淮南子·天文训》也记述了十二律相生:“黄钟之律, 九寸而宫音调. 因而九九八十一, 故黄钟之数立焉. 即取黄钟宫, 音律弦长 9 寸、律数 81, 用三分损益法计算了十二律的律长和律数. 结果见表 2.

表 2 《淮南子. 天文训》生律结果

律名	相生次序	今日音名	七声宫调	律长(弦长)	律数①	律数②(比例数)
黄钟	1	C	宫	9. 00	81	1
大吕	8	#C		8. 42	76	2048/2187
太簇	3	D	商	8. 00	72	8/9
夹钟	10	#D		7. 49	68	16384/19683
姑洗	5	E	角	7. 11	64	64/81
仲吕	12	F		6. 66	60	131072/177147
蕤宾	7	#F	变徵	6. 32	57	512/729
林钟	2	G	徵	6. 00	54	2/3
夷则	9	#G		5. 62	50	4076/6561
南吕	4	A	羽	5. 33	48	16/27
无射	11	#A		4. 99	45	32768/59049
应钟	6	B	变宫	4. 74	42	128/243
清黄	(13)	C^1	(宫)	(4. 44)	—	(1/2)

注: ①《淮南子·天文训》给出的律数; ② 黄钟宫音的律数为 1, 按三分损益法得其它各律的律数(比例数).

《史记·律书》和《汉书·律历志》等文献中也有十二律相生的记载. 这些文献中有的取黄钟宫音的律数为 1, 按三分损益法而得其它十一律的律数(比例数), 见表 2. 其余内容这里不再重复.

综上所述, 三分损益法是在弦线上确定各种音高及对应弦长比的内部联系和规律的一种数学方法. 在人们探索自然现象的历史中, 三分损益法是科学史上将自然现象总结为数学规律的最早、最成功的尝试.

参考文献

[1] 李纯一. 先秦音乐史[M]. 北京: 人民音乐出版社, 1994.
[2]《通典》卷一百四十三《乐三》
[3] 黄翔鹏. 贾湖骨笛的测音研究[J]. 文物, 1989(11): 15.
[4] 黄翔鹏. 溯流探源—中国传统音乐研究[M]. 北京: 人民音乐出版社, 1993. 10-11.
[5] 李纯一. 中国古代音乐史稿(第一分册)[M]. 北京: 人民音乐出版社, 1984. 40.
[6] 戴念祖. 中国科学技术史. 物理学卷[M]. 北京: 科学出版社, 2001. 272-274.
[7] 戴念祖. 中国物理学史大系. 声学史[M]. 长沙: 湖南教育出版社, 2001. 206.
[8] (明)朱载堉. 律学新说[M]. 冯文慈点校本. 北京: 人民音乐出版社, 1986. 136.

Sanfen Sunyi Mmethod — the Earliest Method to Specify Mathematical Natures of Music in Ancient China

WANG Yi
(School of Art and Music, Shanxi Datong University, Datong Shanxi, 037009)

Abstract: Sanfen sunyi method was firstly used in ancient China to calculate relative pitch, tone relations and scale structures of pentatonic scale, diatonic scale and twelve frequencies. References and archaeologies verified that Sanfen sunyi method is the earliest method to specify mathematical natures of music in ancient China.

Key words: sanfen sunyi method; pentatonic scale; diatonic scale; twelve frequencies